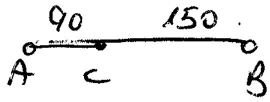
1 (1463)

א. נסמן את מהירות רכבת המשא ב- x

	מהירות	זמן	דרך
רכבת משא	x	$\frac{240}{x}$	240
רכבת נוסעים	$x+20$	$\frac{150}{x+20}$	150



$$\frac{240}{x} > \frac{150}{x+20} + 1 + \frac{1}{2} \quad / \cdot x(x+20) \longrightarrow 240x+4800 > 150x + 1\tfrac{1}{2}x^2 + 30x$$

$$1\tfrac{1}{2}x^2 - 60x - 4800 < 0$$

$$-40 < x < 80$$

מכיוון שמהירות היא חיובית אז: $\boxed{0 < x < 80}$

ב. $\frac{240}{x} = \frac{150}{x+20} + 1 + \frac{1}{2} \longrightarrow \boxed{x = 80}$

כך שרכבת הנוסעים נסעה $\frac{150}{80+20} = 1\frac{1}{2}$ שעות.

רכבת המשא עברה $80 \cdot 2\frac{1}{2} = 200$ ק"מ בזמן הזה.

2 (1463)

א. נניח שהטענה נכונה ונעבור ל $n+1$

$$a_{n+1} = 6^{n+1} + (-1)^{n+2} = 6 \cdot 6^n + (-1)^{n+2} = 6\left(6^n + (-1)^{n+1}\right) - 6(-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} =$$

$$= 6a_n + (-1)^{n+1}(-6-1) = \underbrace{6a_n}_{\text{מתחלק ב-7 לפי הנחת האינדוקציה}} - \underbrace{7(-1)^{n+1}}_{\text{מתחלק ב-7}}$$

ב. נניח שהביטוי $1+2+2^2+\dots+2^{4n-1}$ מתחלק ב-15 ללא שארית.

נראה עבור $n+1$:

$$\underbrace{1+2+2^2+\dots+2^{4n-1}}_{\text{מתחלק לפי ההנחה ב-15}} + 2^{4n} + 2^{4n+1} + 2^{4n+2} + 2^{4n+3}$$

$$+ 2^{4n}(1+2^1+2^2+2^3)$$

$$+ \underbrace{2^{4n} \cdot 15}_{\text{מתחלק ב-15}}$$

3 (1463)

$$\frac{1}{3} = p(\text{מבוגר} \mid \text{א}) = \frac{p(\text{א} \cap \text{מבוגר})}{p(\text{א})}$$

$$p(\text{א} \cap \text{מבוגר}) = \frac{1}{3} \cdot 0.3 = 0.1$$

$$\frac{3}{5} = p(\text{מבוגר} \mid \text{ב}) = \frac{p(\text{ב} \cap \text{מבוגר})}{p(\text{ב})}$$

$$p(\text{ב} \cap \text{מבוגר}) = \frac{3}{5} \cdot 0.4 = 0.24$$

$$\frac{1}{4} = p(\text{א} \mid \text{מבוגר}) = \frac{p(\text{א} \cap \text{מבוגר})}{p(\text{מבוגר})} \longrightarrow p(\text{מבוגר}) = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$$

נשלים את הטבלה.

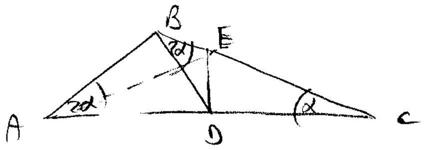
	א	ב	ג	
צעירים	0.2	0.16	0.24	0.6
מבוגרים	0.1	0.24	0.06	0.4
	0.3	0.4	0.3	1

א. $p(\text{צעיר}) = 0.6 = 60\%$

ב. $p(\text{צעיר} \cap \text{ב}) = 0.16 = 16\%$

ג. $p(\text{מבוגר} \mid \text{ג}) = \frac{p(\text{ג} \cap \text{מבוגר})}{p(\text{ג})} = \frac{0.06}{0.3} = 0.2 = 20\%$

4.
(1464)



א. $ED = ED$ (צלע משותפת)
$AD = DC$ (נתון)
$\sphericalangle EDA = 90^\circ = \sphericalangle EDC$ (נתון)
$\Downarrow$
$\triangle AED \cong \triangle CED$ (צ.ז.צ)
$\Downarrow$
$\sphericalangle BAE = \sphericalangle BAD - \sphericalangle EAD = 2\alpha - \alpha = \alpha \leftarrow \sphericalangle ECD = \alpha = \sphericalangle EAD$

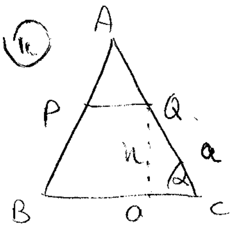
ב. (1) $\sphericalangle BAE = \alpha = \sphericalangle BCD$
$\sphericalangle CBD = 2\alpha = \sphericalangle BEA$ (חיצונית ל-$\triangle AEC$) $\Big\}$ $\triangle ABE \sim \triangle BDC$ (ז.ז) $\rightarrow \boxed{\frac{BE}{BD} = \frac{AB}{DC}}$

(2) $\frac{BE}{BD} = \frac{AB}{DC} = \frac{AB}{AD}$ (מסעיף הקודם)
$\sphericalangle BAD = 2\alpha = \sphericalangle CBD$ $\Big\}$ $\triangle ABD \sim \triangle BED$ (צלע, זווית, צלע)

ג. $\sphericalangle ADB = 3\alpha$ (חיצונית ל-$\triangle BDC$)
$3\alpha = \sphericalangle ADB = \sphericalangle BDE$ (מהדמיון בסעיף הקודם) $\Big\}$ $90^\circ = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDE = 6\alpha$
$\boxed{\alpha = 15^\circ}$

5.
(1464)

א.



נוריד גובה מ- Q ל-BC ונסמנו ב-h.

$\sin\alpha = \frac{h}{QC} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\sin\alpha$

$S_{PQCB} = \frac{1}{2}a^2 = \frac{(PQ+BC)h}{2} = \frac{(PQ+a)}{2}\cdot a\sin\alpha \;/ : \frac{a}{2}$

$(PQ+a)\sin\alpha = a \rightarrow PQ + a = \frac{a}{\sin\alpha} \rightarrow PQ = \frac{a}{\sin\alpha} - a = a\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$

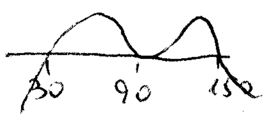
המשולשים APQ ו- ABC דומים, לכן מתקיים:

$\frac{AQ}{QC} = \frac{PQ}{BC} = \frac{a\left(\frac{1}{\sin\alpha}-1\right)}{a} = \frac{1}{\sin\alpha} - 1$

$\frac{AQ}{AQ+a} = \frac{1}{\sin\alpha} - 1 \rightarrow \frac{AQ}{AQ+a} = \frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha} \rightarrow AQ\sin\alpha = AQ + a - AQ\sin\alpha - a\sin\alpha$

$AQ(\sin\alpha - 1 + \sin\alpha) = a(1-\sin\alpha) \rightarrow \boxed{AQ = \frac{a(1-\sin\alpha)}{2\sin\alpha - 1}}$

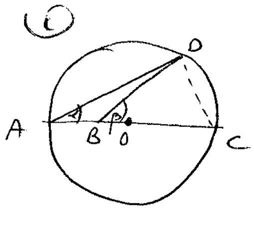
ב. נדרוש ש $AQ \geq 0$ כי $\frac{a(1-\sin\alpha)}{2\sin\alpha-1} \geq 0$ $\rightarrow$ $1-\sin\alpha = 0,\quad 2\sin\alpha - 1 = 0$
$\sin\alpha = 1 \qquad \sin\alpha = \frac{1}{2}$
$\alpha = 90 \qquad \alpha = 30, 150$



$\longrightarrow \quad 30 < \alpha < 150$

שימו לב ש α יכולה להיות שווה 90° (מתקבל $AQ=0$)
אבל לא יכולה להיות שווה 30° או 150° כי אז
המכנה מתאפס.

.6 (1464) א



$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\dfrac{AD^2 \sin\alpha \sin\sphericalangle ADB}{2\sin\sphericalangle ABD}}{\dfrac{AD^2 \sin\alpha \cdot \sin 90}{2\sin\sphericalangle C}} = \frac{\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(180-\beta)}}{\dfrac{1}{\sin(90-\alpha)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}}{\dfrac{1}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha \sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}$$

ב

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{1}{2} = \frac{\cos 60 \sin(\beta-60)}{\sin\beta} \longrightarrow \frac{1}{2}\sin\beta = \cos 60 \sin(\beta-60) = \frac{1}{2}\sin(\beta-60)$$

$$\sin\beta = \sin(\beta-60) = \sin\beta\cos 60 - \cos\beta\sin 60 = \frac{1}{2}\sin\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta$$

$$\frac{1}{2}\sin\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta \;/ : \frac{1}{2}\cos\beta \longrightarrow \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \tan\beta = -\sqrt{3}$$

$$\beta = -60 \longrightarrow \boxed{\beta = 120}$$

.7 (1465) א

(1) $0 = \cos^2 x - a^2\cos x = \cos x(\cos x - a^2) \longrightarrow \cos x = 0 \;, \quad \cos x = a^2$

$\cos x = 0$ $\quad$ $a > \sqrt{2}$

לכן אין פתרון

$(\frac{\pi}{2}, 0) \leftarrow x = \frac{\pi}{2} \leftarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$(1\frac{1}{2}\pi, 0) \leftarrow x = 1\frac{1}{2}\pi$

(2) $f'(x) = -2\cos x \sin x + a^2 \sin x = \sin x(-2\cos x + a^2)$

$f'(x) = 0 \longrightarrow \sin x = 0 \quad , \quad -2\cos x + a^2 = 0$

$x = \pi k \quad \Big| \quad \cos x = \frac{a^2}{2} \longrightarrow a > \sqrt{2}$

לכן אין פתרון

$x = 0 \;,\; x = \pi \;,\; x = 2\pi$

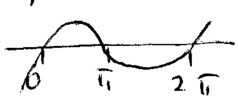
$(0, 1-a^2) \quad (\pi, 1+a^2) \quad (2\pi, 1-a^2)$

$(2\pi, 1-a^2)$ $(0, 1-a^2)$ הינן 2 הנק'

הן מינימום מוחלט (שימו לב שהן נק' הקצה)

והנק' $(\pi, 1+a^2)$ היא מקס מוחלט.

(3)

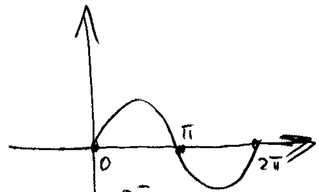


ראינו שהנגזרת מתאפסת ב-3 נק'

לכן תחום העליה $0 < x < \pi$

" הירידה $\pi < x < 2\pi$

ב (1)



(2) $\int_0^{\pi} f'(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} [0 - f'(x)]dx = f(\pi) - f(0) - f(2\pi) + f(\pi) = 16$

$16 = 2f(\pi) - f(0) - f(2\pi) = 2(1+a^2) - (1-a^2) - (1-a^2) = 2 + 2a^2 - 1 + a^2 - 1 + a^2 = 4a^2$

$16 = 4a^2 \longrightarrow \boxed{a = 2}$

8.
(1465) $\frac{1}{c-0}\int_0^c [(x^2-2x)^4(x-1)dx = (*)$

נסמן $u = x^2-2x$
$du = dx(2x-2)$
הכן

$$\int (x^2-2x)^4(x-1)dx = \int \frac{u^4(x-1)du}{2x-2} =$$
$$= \int \frac{u^4}{2}du = \frac{u^5}{10} = \frac{(x^2-2x)^5}{10}$$

נחזור ל - (*)

$$\frac{1}{c-0}\int_0^c [(x^2-2x)^4(x-1)dx = \frac{1}{c}\cdot\frac{(x^2-2x)^5}{10}\Big|_0^c =$$
$$= \frac{1}{c}\cdot\left[\frac{(c^2-2c)^5}{10} - 0\right] = \frac{1}{c}\cdot\frac{(c^2-2c)^5}{10} = \frac{c^5(c-2)^5}{10c} = \frac{c^4(c-2)^5}{10}$$

נבדוק מתי מתקבל מינימום של הביטוי (ע״י נגזרת)

$$\frac{4c^3(c-2)^5+5(c-2)^4c^4}{10} = \frac{1}{10}c^3(c-2)^4[4(c-2)+5c] \underset{\text{נדרוש}}{=} 0$$

$c=0$, $c=2$, $9c-8=0$
$c=8/9$

נבדוק ש $c=8/9$ היא זה המינימום המבוקשת

9.
(1465) א

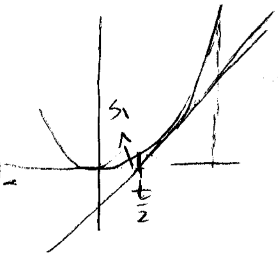
$y'=2x \to y'(t)=2t$ שיפוע:
(t,t^2) נק׳ ההשקה

נמצא את משוואת המשיק:

$$y-t^2 = 2t(x-t)$$
$$y = 2tx-2t^2+t^2 = 2tx-t^2$$

נקודת החיתוך עם ציר ה-x: $(\frac{t}{2},0)$

$$S = \int_0^{\frac{t}{2}} x^2dx + \int_{\frac{t}{2}}^{3}[x^2-(2tx-t^2)]dx$$



$$S = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{t/2} + \frac{x^3}{3} - tx^2 + t^2x\Big|_{\frac{t}{2}}^{3} = \frac{t^3}{24} + (9-9t+3t^2) -$$
$$\left(\frac{t^3}{24} - \frac{t^3}{4} + \frac{t^3}{2}\right) = 9-9t+3t^2-\frac{1}{4}t^3$$

$$S' = -9+6t-\frac{3}{4}t^2 \underset{\text{נדרוש}}{=} 0 \to t=6,\ t=2$$

$$S'' = 6-1.5t \to S''(6)<0 \underset{max}{} \quad S''(2)>0 \underset{min}{} \quad \boxed{S(2)=1}$$

ב

משוואת המשיק היא $(t=2)$ $\quad y=4x-4$

רדיוס החרוט מתקבל עבור $x=3$ $\quad y(3)=8$