

מבחן טרימסטר ב' במתמטיקה

משך המבחן שלוש וחצי שעות. יש לפתור את **כל** השאלות!

אין להשתמש במחשבון! אין לצאת ב-**45** הדקות האחרונות של המבחן!

בכל שאלה חובה לנמצא את כל התשובות. חובה לנמק בכל תשובה ולפשטה ככל הניתן!

אם במכנה של ביטויו קלשו מופיעים שורשים – יש להשתחרר מהאי-רציונליות במכנה.

בל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות – חייבת הוכחה!

כל משפט בגיאומטריה המשיר שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע בראשית המשפטים – חייב הוכחה!

תזכורות! – חובה לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה ולא ביד חופשית!

יש להתחיל בכל שאלה בדף חדש!

שאלה 1 (14%)

מנקודה O מעבירים $n+1$ קרנים כך שהזווית בין כל שתי קרניות שבנות היא $\frac{2\pi}{n}$.

על קרן אחת בוחרים נקודה A_0 בקר ש- $A_0O = a$.

מנקודה A_0 מורידים אנך A_0A_1 על קרן סמוכה,

מנקודה A_1 מורידים אנך A_1A_2 על קרן סמוכה באותו כיוון וממשיכים באותה דרך. מתקבלים קו שבור.

א. הוכיח שהקטיעים $OA_1, OA_2, OA_3, \dots, OA_n$ יוצרים סדרה גיאומטרית.

ב. מה אורךו של הקו השבור $A_0A_1A_2\dots A_n$?

שאלה 2 (14%)

א. נתונה סדרה ע"י נוסחת נסיגה $a_{k+1} - a_k = 3k^2 - 9k + 4$, $k = 1, 2, 3, \dots$; $a_1 = 7$ הוכח, שלכל n טבעי, a_n הוא מספר אי-זוגי.

ב. עבור אילו ערכים של a שטח התחום החסום על-ידי: העקום $y = f(x)$, ציר x והישרים $x = 4$, $x = 1$, הוא מינימלי?

שאלה 3 (20%)

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{x^3 - ax^2 - 1}{x^2 - 1}$$

א. מצא את a עבורו הישר $3-x=y$ הוא אסימפטוטה לפונקציה הנתונה.

ב. חקרו את הפונקציה כאשר $a=0$:

1. תחום הגדרה. 1%

2. נקודות חיתוך עם הצירים. 2%

3. אסימפטוטות. 3%

4. תחום גדרה. 4%

5. נקודות קיצון. 5%

6. ציר רשות (סקיצה) של הגרף. 6%

7. ציר רשות (סקיצה) של הגרף. 7%

8. ציר רשות (סקיטה). 8%

9. ציר רשות (סקיטה). 9%

10. ציר רשות (סקיטה). 10%

11. ציר רשות (סקיטה). 11%

12. ציר רשות (סקיטה). 12%

13. ציר רשות (סקיטה). 13%

14. ציר רשות (סקיטה). 14%

15. ציר רשות (סקיטה). 15%

16. ציר רשות (סקיטה). 16%

17. ציר רשות (סקיטה). 17%

18. ציר רשות (סקיטה). 18%

19. ציר רשות (סקיטה). 19%

20. ציר רשות (סקיטה). 20%

21. ציר רשות (סקיטה). 21%

22. ציר רשות (סקיטה). 22%

23. ציר רשות (סקיטה). 23%

24. ציר רשות (סקיטה). 24%

25. ציר רשות (סקיטה). 25%

26. ציר רשות (סקיטה). 26%

27. ציר רשות (סקיטה). 27%

28. ציר רשות (סקיטה). 28%

29. ציר רשות (סקיטה). 29%

30. ציר רשות (סקיטה). 30%

31. ציר רשות (סקיטה). 31%

32. ציר רשות (סקיטה). 32%

33. ציר רשות (סקיטה). 33%

34. ציר רשות (סקיטה). 34%

35. ציר רשות (סקיטה). 35%

36. ציר רשות (סקיטה). 36%

37. ציר רשות (סקיטה). 37%

38. ציר רשות (סקיטה). 38%

39. ציר רשות (סקיטה). 39%

40. ציר רשות (סקיטה). 40%

41. ציר רשות (סקיטה). 41%

42. ציר רשות (סקיטה). 42%

43. ציר רשות (סקיטה). 43%

44. ציר רשות (סקיטה). 44%

45. ציר רשות (סקיטה). 45%

46. ציר רשות (סקיטה). 46%

47. ציר רשות (סקיטה). 47%

48. ציר רשות (סקיטה). 48%

49. ציר רשות (סקיטה). 49%

50. ציר רשות (סקיטה). 50%

51. ציר רשות (סקיטה). 51%

52. ציר רשות (סקיטה). 52%

53. ציר רשות (סקיטה). 53%

54. ציר רשות (סקיטה). 54%

55. ציר רשות (סקיטה). 55%

56. ציר רשות (סקיטה). 56%

57. ציר רשות (סקיטה). 57%

58. ציר רשות (סקיטה). 58%

59. ציר רשות (סקיטה). 59%

60. ציר רשות (סקיטה). 60%

61. ציר רשות (סקיטה). 61%

62. ציר רשות (סקיטה). 62%

63. ציר רשות (סקיטה). 63%

64. ציר רשות (סקיטה). 64%

65. ציר רשות (סקיטה). 65%

66. ציר רשות (סקיטה). 66%

67. ציר רשות (סקיטה). 67%

68. ציר רשות (סקיטה). 68%

69. ציר רשות (סקיטה). 69%

70. ציר רשות (סקיטה). 70%

71. ציר רשות (סקיטה). 71%

72. ציר רשות (סקיטה). 72%

73. ציר רשות (סקיטה). 73%

74. ציר רשות (סקיטה). 74%

75. ציר רשות (סקיטה). 75%

76. ציר רשות (סקיטה). 76%

77. ציר רשות (סקיטה). 77%

78. ציר רשות (סקיטה). 78%

79. ציר רשות (סקיטה). 79%

80. ציר רשות (סקיטה). 80%

81. ציר רשות (סקיטה). 81%

82. ציר רשות (סקיטה). 82%

83. ציר רשות (סקיטה). 83%

84. ציר רשות (סקיטה). 84%

85. ציר רשות (סקיטה). 85%

86. ציר רשות (סקיטה). 86%

87. ציר רשות (סקיטה). 87%

88. ציר רשות (סקיטה). 88%

89. ציר רשות (סקיטה). 89%

90. ציר רשות (סקיטה). 90%

91. ציר רשות (סקיטה). 91%

92. ציר רשות (סקיטה). 92%

93. ציר רשות (סקיטה). 93%

94. ציר רשות (סקיטה). 94%

95. ציר רשות (סקיטה). 95%

96. ציר רשות (סקיטה). 96%

97. ציר רשות (סקיטה). 97%

98. ציר רשות (סקיטה). 98%

99. ציר רשות (סקיטה). 99%

100. ציר רשות (סקיטה). 100%

שאלה 4 (16%)

במעגל שרדיוסו R חסום משולש שווה-שוקיים ABC שבו $\angle C = \angle B = \alpha$.

חוצזה-זווית B חותך את המעגל בנקודה D .

המשך AD חותך את המשך BC בנקודה E .

א. חשב את AE באמצעות R ו- α .

ב. מצא את $\sin \alpha$ שעבורו אורק הקטע AE מקסימלי.

שאלה 5 (18%)

- 8% א. הוכח שהאי-שוויון $1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x \geq 0$ מתקיים לכל x .
- 10% ב. פתר $\operatorname{ctg}^2 x \geq \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$

שאלה 6 (18%)

$$\text{במשולש } ABC, \angle C - \angle B = \frac{\pi}{2}$$

- 9% א. חשב את האורך של הצלע AC באמצעות a ו- $\angle B$.

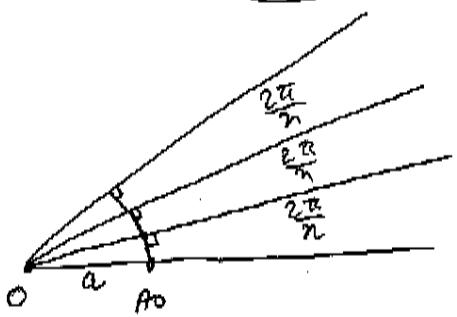
$$\text{ב. הוכח כי } \angle B = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4S}{a^2}$$

בהצלחה!

(19.09.14) (1)

$$\frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$$

$19 < n$

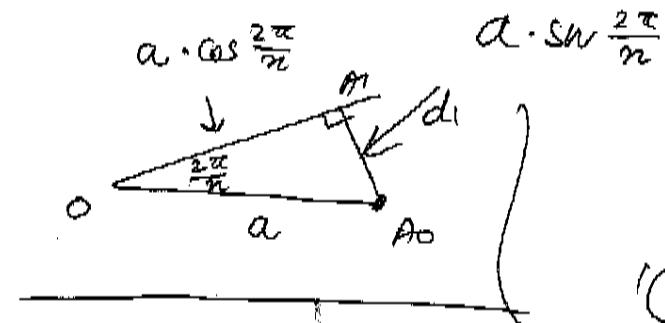


E

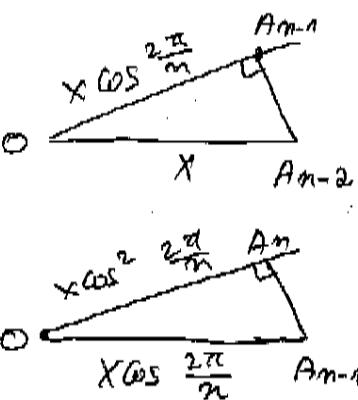
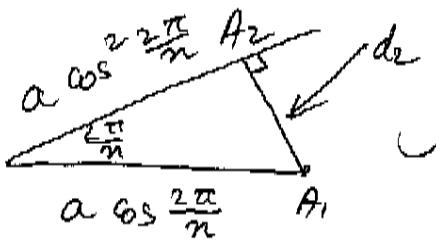
$$f = \frac{\partial A_m}{\partial A_{m-1}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

1/11 11
2/11 11
3/11 11
4/11 11

$$S = d_1 + d_2 + \dots + d_{m-1} + d_m$$



G10



SG

$$\textcircled{2} \quad d_1 = a \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$d_2 = a \cos \frac{2\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$d_3 = a \cos^2 \frac{2\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

$$\cos \frac{2\pi}{n} \neq 1$$

$$\frac{2\pi}{n} = 2\pi k$$

$$\frac{1}{n} = k$$

\downarrow $\exists n$

$$S =$$

$$\boxed{a \cot \left(\frac{\pi}{n} \right) \left(1 - \cos^n \frac{2\pi}{n} \right)}$$

$$\frac{d_1 (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \left(\cos^n \frac{2\pi}{n} - 1 \right)}{\cos \frac{2\pi}{n} - 1}$$

$$\frac{a \cdot \cancel{\sin \left(\frac{\pi}{n} \right)} \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \left(\cos^n \frac{2\pi}{n} - 1 \right)}{\cancel{q - 1} \cancel{\sin \left(\frac{\pi}{n} \right)} - \cancel{1}} =$$

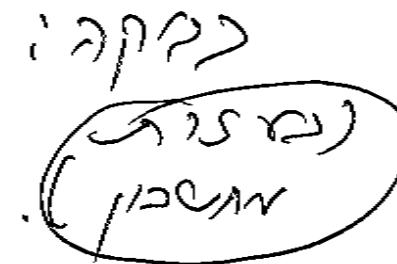
$$\frac{a \cos \frac{\pi}{n} \left(1 - \cos^n \frac{2\pi}{n} \right)}{\sin \frac{\pi}{n}}$$



የንግድ 5+1

$$n=5 \Rightarrow$$

$$(n>4) \quad \text{የንግድ } n \text{ በ } \alpha = \frac{2\pi}{5} = \frac{360}{5} = 72^\circ$$



$$S = a \theta + (36) \left(1 - \cos^5 72\right) = \underline{\underline{1.372 a}}$$

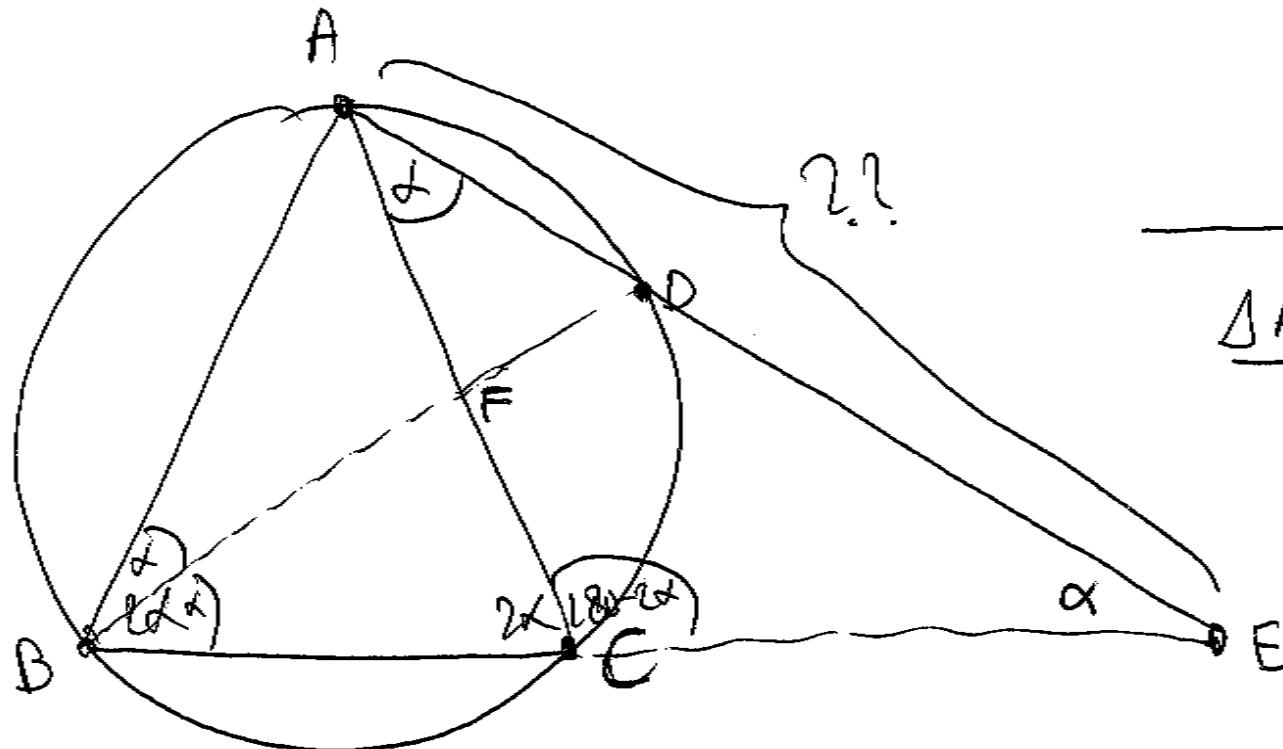
$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 =$$

$$\begin{aligned} &\downarrow && \downarrow && \downarrow \\ a \sin 72 & & a \cos 72 \sin 72 & & a \cos^2 72 \sin 72 & \\ &\downarrow && \downarrow && \downarrow \\ a \cos^2 72 \sin 72 & & & & a \cos^3 72 \sin 72 & \end{aligned}$$

$$\sin 72 \left(1 + (\cos 72 + \cos^2 72 + \dots + \cos^4 72)\right)$$

$$\underline{\underline{1.372 a}}$$

(4)

 $\triangle ABC$:

$$\frac{AB}{\sin 2x} = 2R$$

$$\triangle ACE: \frac{AE}{\sin x} = \frac{2R \sin 2x}{\sin x}$$

$$AE = \frac{2R (2 \sin x \cos x)^2}{\sin x} = \frac{8R \sin^2 x \cos^2 x}{\sin x} = 8R \sin x (1 - \sin^2 x)$$

$$\boxed{AE = 8R (\sin x - \sin^3 x)}$$

$$AE' = \cos x - 3 \sin^2 x \cos x = 0$$

$$\cos x (1 - 3 \sin^2 x) = 0$$

$$\begin{array}{l} \cos \alpha = 0 \\ \alpha = 90^\circ \\ \phi \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \sin^2 \alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \\ \boxed{\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \\ 180^\circ \text{ down } \times \text{ sk } \\ \text{ED} \\ \text{S12N} \end{array}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta E'' = -\sin \alpha (1 - 3 \sin^2 \alpha) + \cos \alpha (-3 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)$$

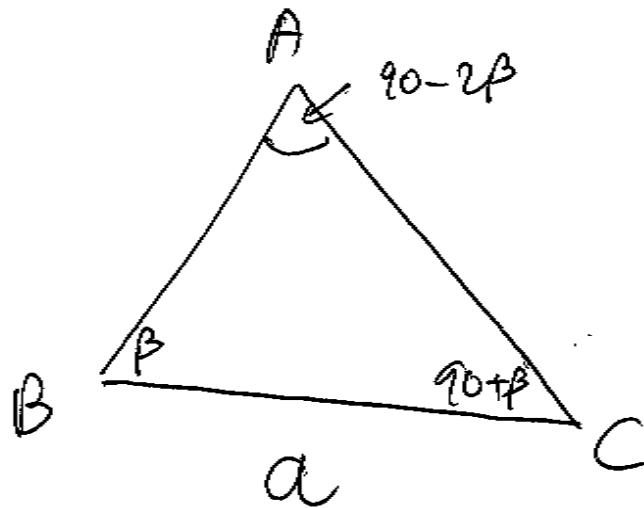
$$\Delta E'' = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right)}_0 + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (-6) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}_{-8/3} < 0$$

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

⑥

$$\angle B = \beta$$

$$\alpha - \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ + \beta$$



$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin(90-2\beta)} \Rightarrow AC = \frac{a \sin \beta}{\cos 2\beta}$$

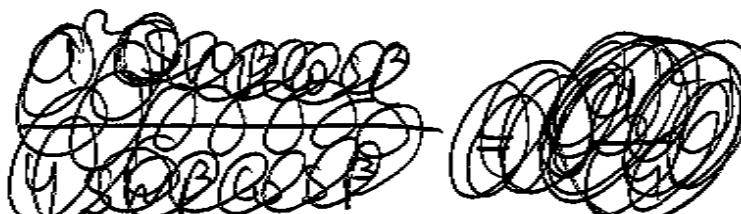
⑦

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sin \beta \sin(90+\beta)}{2 \sin(90-2\beta)} =$$

$$\begin{aligned} \angle B = \beta &= \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{4 a^2 \sin \beta \cos \beta}{2 \cos 2\beta \cdot a^2} \right) = \\ &\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\cos 2\beta} \right) = \frac{1}{2} \arctan (\tan 2\beta) \\ &\frac{1}{2} \cdot 2\beta = \beta \end{aligned}$$

(2)

$$\frac{a^2 \sin \beta \cos \beta}{2 \cos 2\beta} =$$



2
k

$$a_{n+1} = a_n + 3n^2 - 9n + 4$$

$$a_1 = 7 \Rightarrow 215^k$$

$$a_n \rightarrow 215^k$$

$$a_{n+1} \rightarrow 215^k$$

$$a_{n+1} = a_n + 3n^2 - 9n + 4$$

לפ' 215^k
הנחתה

$$3n^2 - 3n - 6(n-1) + 10$$

$$3n(n-1) - 6(n-1) + 10$$

$$3(n-1)(n-2) + 10$$

לפ' אונס
הנחתה

לפ' קייזר
הנחתה

כזה

הנה

103

לפ' קייזר

לפ' קייזר

$$3n^2 - 9n + 4 = 215$$

--- גזרה נסota פלאן נסota
--- גזרה קב' פלאן נסota

לפ' קייזר נסota

✓ כלה

✓ גרא

$$3(n+1)^2 - 9(n+1) + 4 = \underline{215}$$

$$\underline{3n^2 - 9n + 4} + 6n + 3 - 9$$

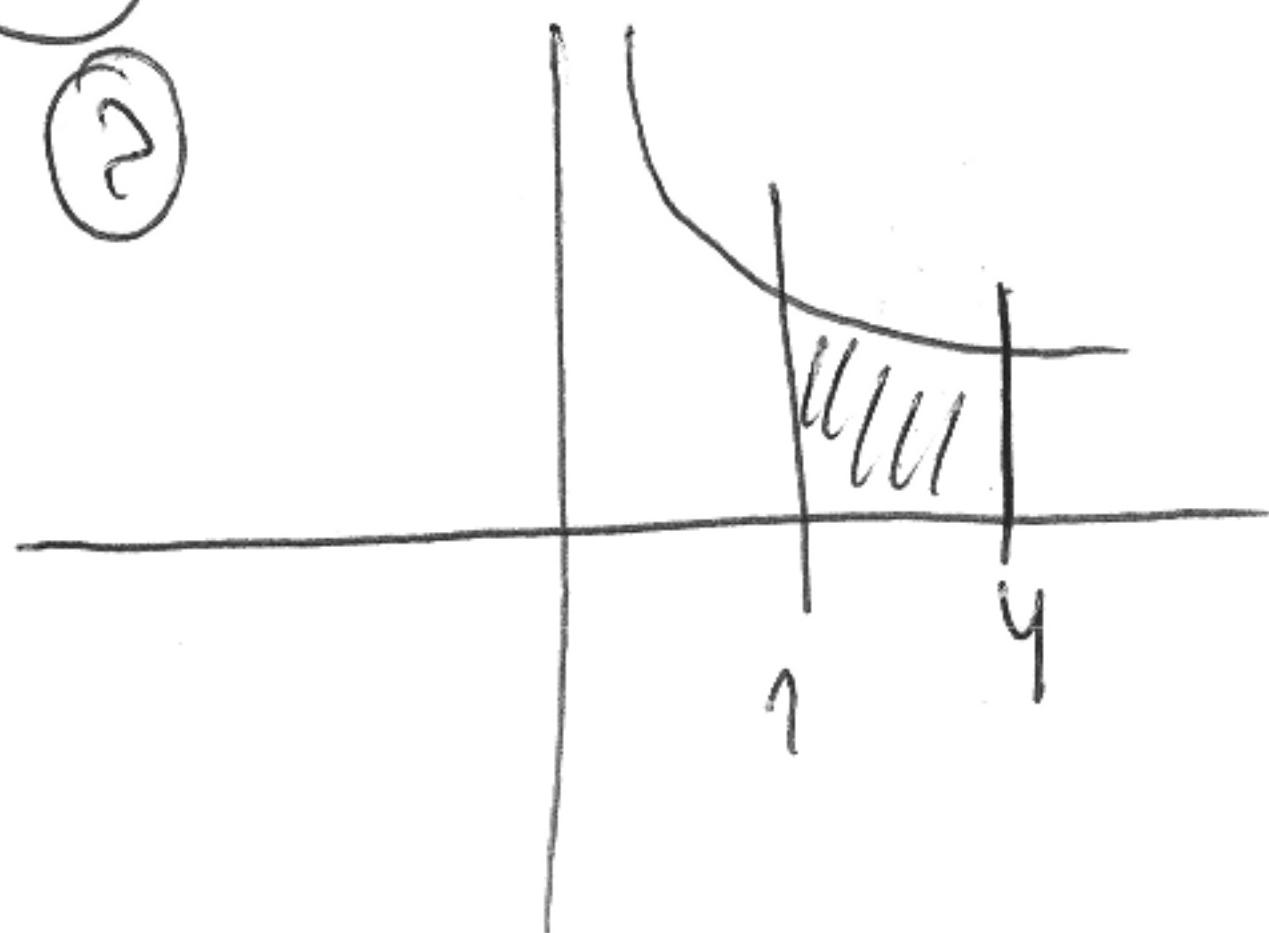
לפ' 215

הנחתה

6n - 6
לפ' 103

לפ' N

②
②



$$\int a + \frac{1}{ax^2} dx = ax + \frac{1}{a} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^4$$

$$ax - \frac{1}{ax} \Big|_1^4 = \left(4a - \frac{1}{4a}\right) - \left(a - \frac{1}{a}\right)$$

$$3a + \frac{1}{a} - \frac{1}{4a} = 3a + \frac{3}{4a}$$

$$3\left(a + \frac{1}{4a}\right)$$

$$\left(a + \frac{1}{4a}\right)' = 1 - \frac{1}{4a^2} = 0$$

$$4a^2 = 1$$

$$a = \pm \frac{1}{2}$$

$$a > 0$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$c'' = 0 - \frac{1}{4} \cdot (-2) \cdot a^{-3} = \frac{1}{2a^3} > 0$$

MW

③

④

$$y = \frac{x^3 - ax^2 - 1}{x^2 - 1}$$

$$y = x - 3$$

$$m=1$$

$$n=-3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - ax^2 - 1}{x^2 - 1} - x =$$

$$\frac{x^3 - ax^2 - 1 - x^3 + x}{x^2 - 1} =$$

$$\frac{-ax^2 + x - 1}{x^2 - 1} = -a = -3$$

$$a = 3$$

②
a=0

$$1) y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$$

$$(1, \frac{3}{2}) \\ n/p$$

$$x \neq 1 \\ x \neq -1$$

$$\frac{x(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$x + \frac{1}{x+1}$$

$$2) (0, 1)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^+} x + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (1, \frac{3}{2}) \quad n/p$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow -1^- \\ -1.601}} x + \frac{1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1^+ \\ -0.999}} x + \frac{1}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ }} \frac{x}{x} + \frac{1}{x(x+1)} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pm\infty \\ }} x + \frac{1}{x+1} - x = 0$$

$$\boxed{y = x}$$

$$(y+5)$$

$$y' = 1 + (-1)(x+1)^{-2} = 0$$

$$1 - \frac{1}{(x+1)^2} = 0 \quad \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = 0$$

$$(x+1)^2 = 1$$

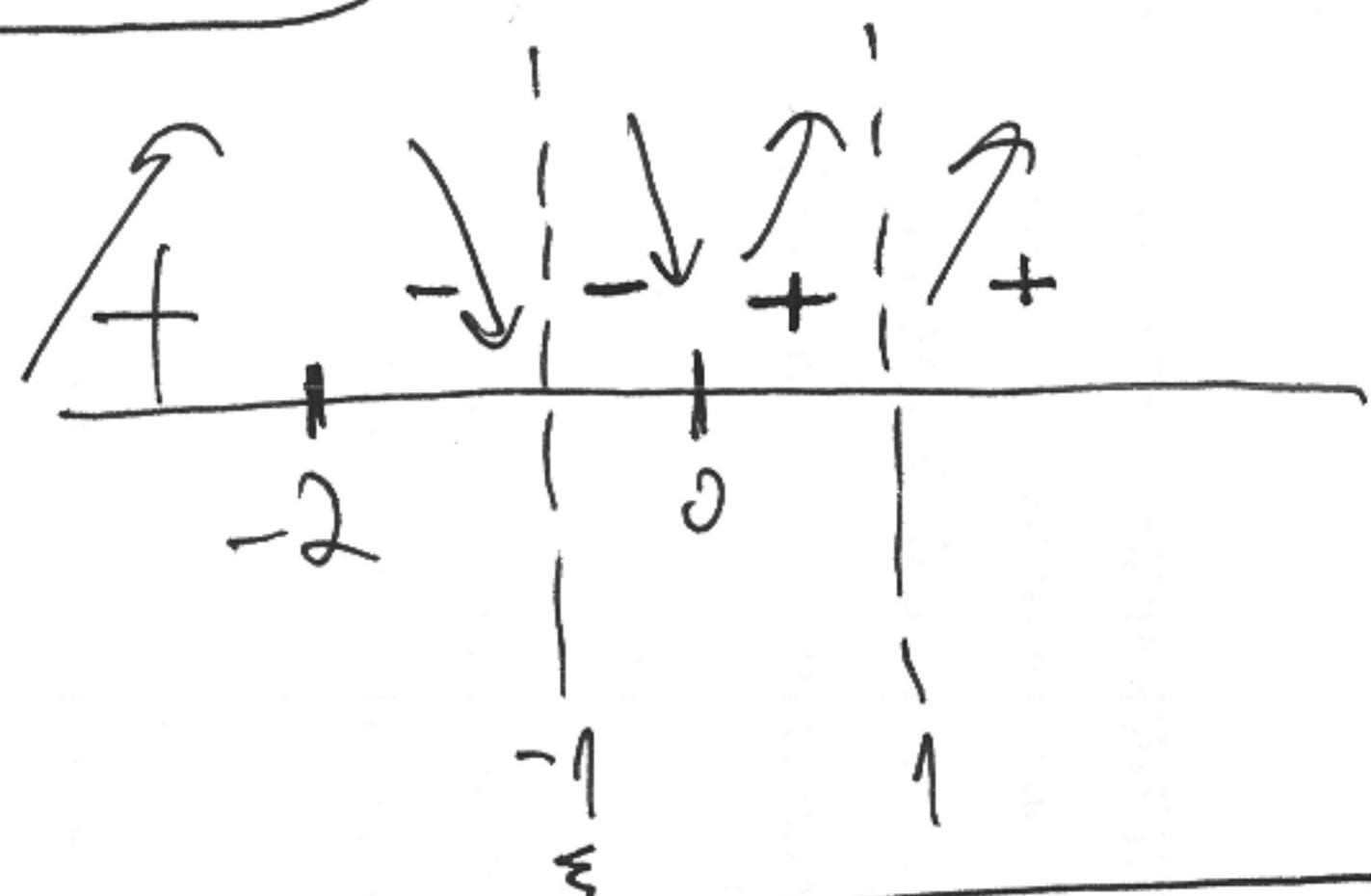
$$x+1 = 1 \quad x+1 = -1$$

$$x=0$$

$$x=-2$$

MW (0,1)

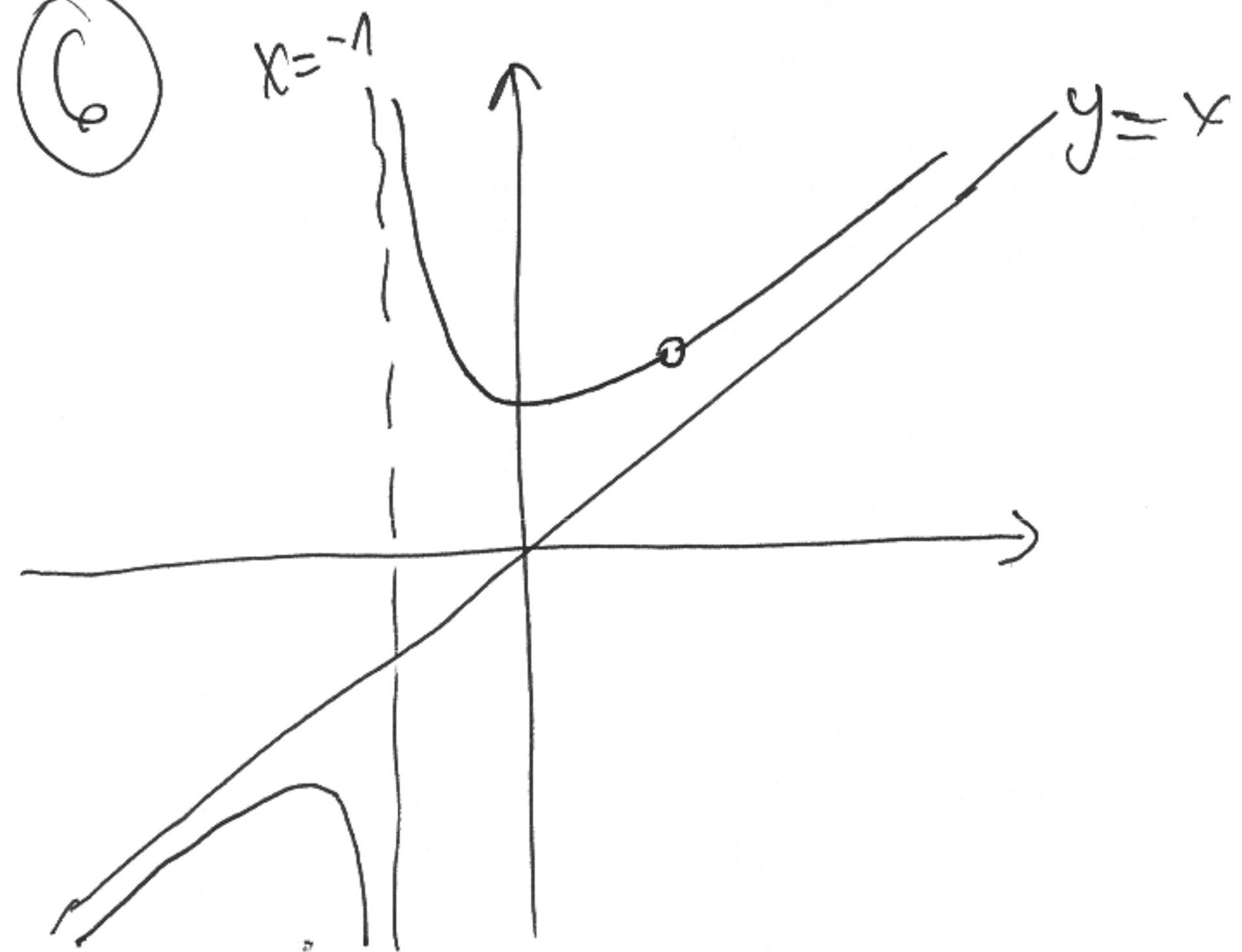
(-2, -3) MAX



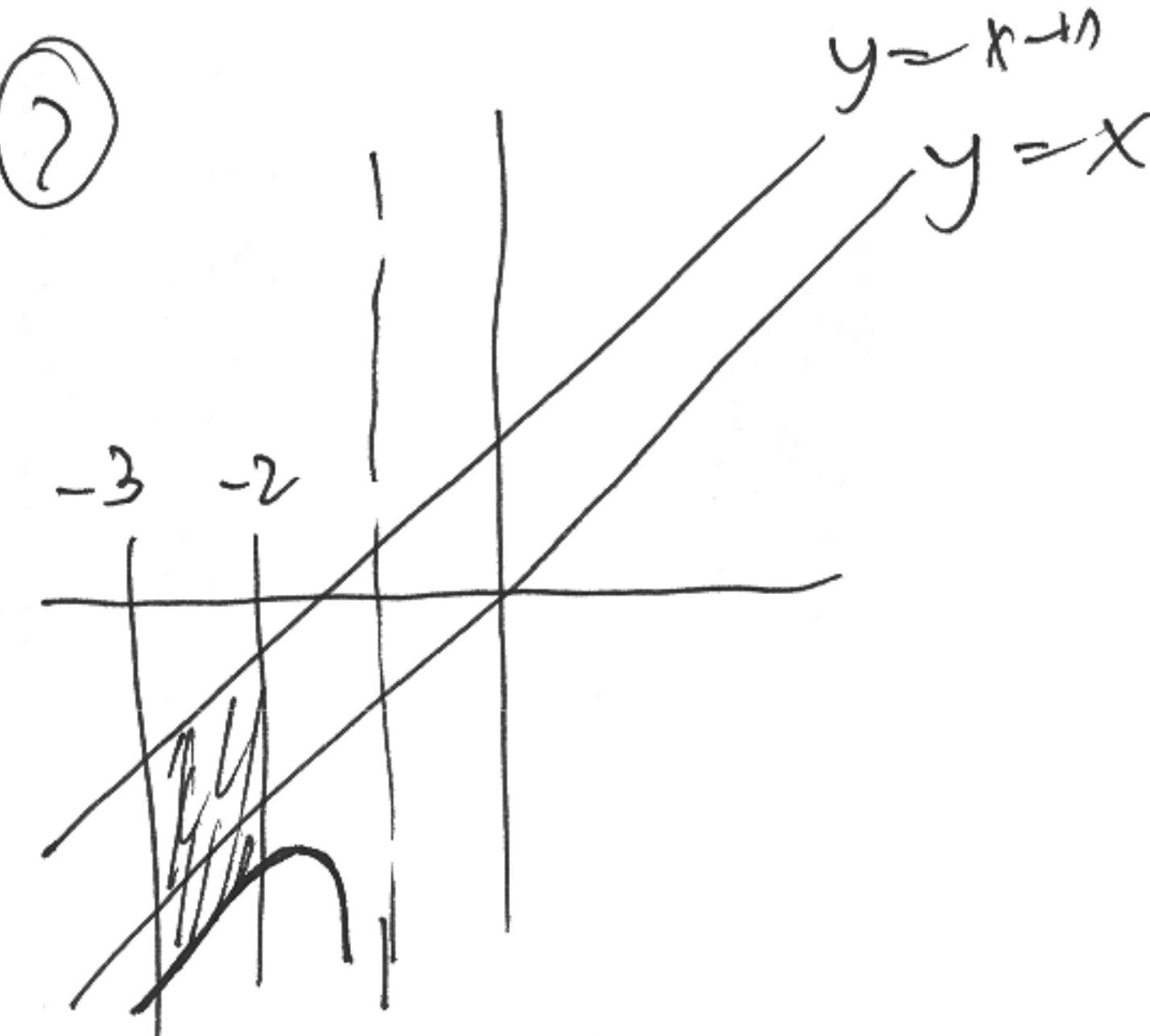
$x < -2, 0 < x < 1, x > 1$ if f(x)

$-2 < x < -1, -1 < x < 0$ if f'(x)

⑥



⑦



$$\int_{-3}^{-2} x+1 - x - \frac{1}{x+1} dx = x - \ln|x+1|$$

$$(-2 - \ln|-1|) - (-3 - \ln|-2|) =$$

$1 + \ln 2$

⑤ ⑥

$$(1 + \sin x) + \cos x(1 + \sin x) \geq 0$$

$$\sin x + 1 \geq 0$$

$$(1 + \sin x)(1 + \cos x) \geq 0$$

$$\cos x + 1 \geq 0$$

for N

⑦

$$\frac{\cos^2 x}{\sin x} > \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$$

$$\sin x \neq 0$$

$$\cos x \neq -1$$

$$\cos^2 x (1 + \cos x) \geq \sin^2 x (1 + \sin x)$$

$$\cos^2 x + \cos^3 x - \sin^2 x - \sin^3 x \geq 0$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \geq 0$$

$$(\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x + \cos x + \sin x) \geq 0$$

$x \in J_{60}^{\circ}$

$$\cos x - \sin x \geq 0$$

$$\cos x \geq \sin x$$

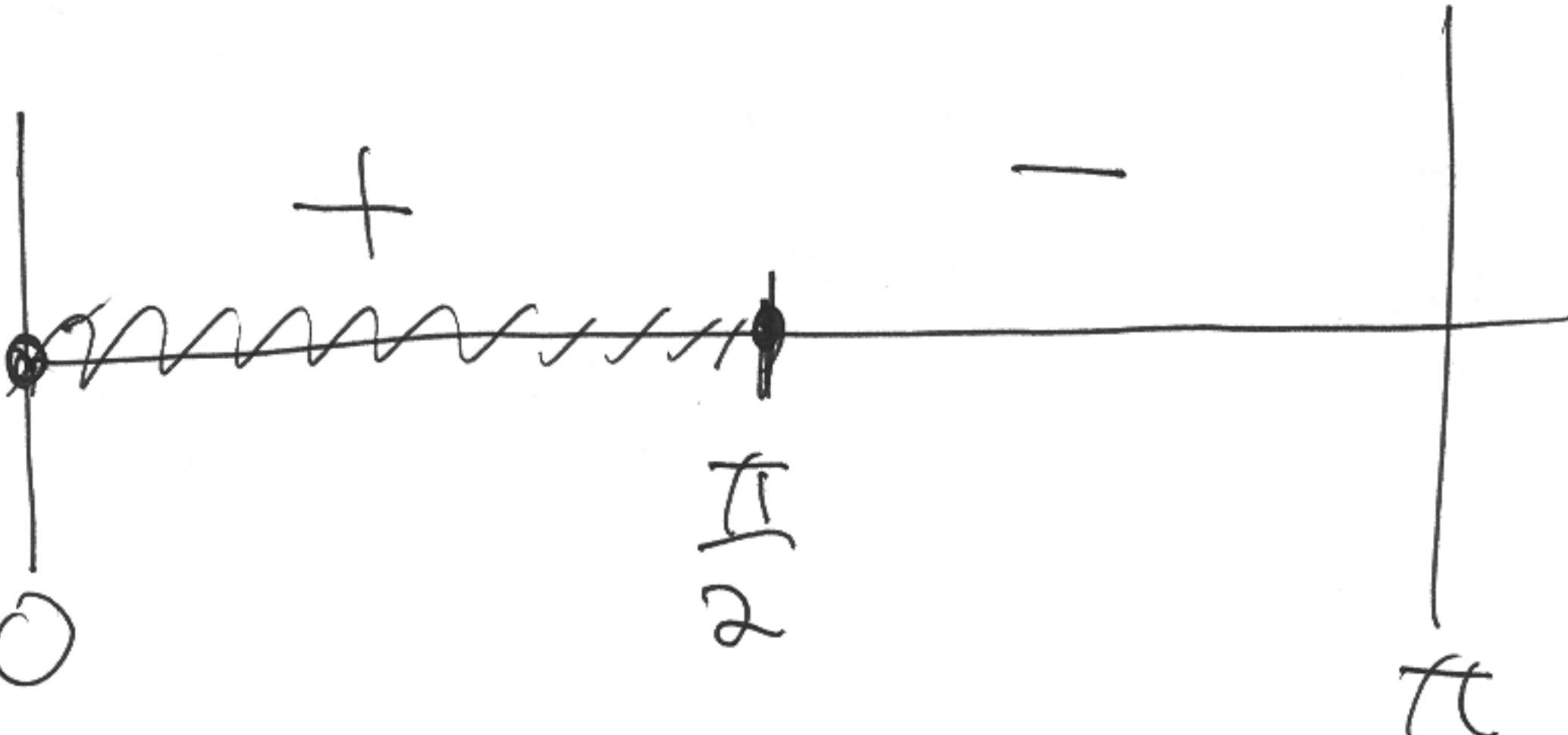
$$\sin(\pi - x) \geq \sin x$$

$$\pi - x = x + 2\pi k$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} + \pi k = x}$$

$$\pi - x = \pi - x + 2\pi k$$

ϕ



$$\boxed{0 + \pi k < x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k}$$